

Pratique Supplémentaire 3

Cette série fait suite aux chapitres 1.5, 1.7, 1.8, 1.9 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Écrire les systèmes linéaires suivant sous la forme $A\vec{x} = \vec{b}$. Déterminer dans chaque cas si les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Donner une matrice A de taille 3×3 à coefficients non-nuls (tous !) et un vecteur \vec{b} de \mathbb{R}^3 , tels que \vec{b} n'appartienne pas à $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ où $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sont les colonnes de A .

Remarque : La notation **span** (en anglais) représente le **vec** (en français).

Exercice 3

a) Déterminer si les transformations linéaires suivantes sont injectives ou surjectives :

$$\text{(a) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(b) } T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) La rotation dans \mathbb{R}^3 d'axe Oz et d'angle 60° (dans le sens trigonométrique).

- b) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Démontrer que si T est surjective alors elle est aussi injective.

Exercice 4

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet la solution triviale.
- b) Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale.
- c) Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.
- d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Vrai-Faux

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5]$ comme ligne, alors le système est incompatible.
- b) Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée.
- c) À chaque fois que l'on a une variable libre dans un système linéaire, le système possède une infinité de solutions.
- d) Une solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système.

Vrai-Faux

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Les vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont linéairement dépendants pour tout choix de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.
- b) Un ensemble formé d'un seul vecteur est linéairement indépendant.
- c) Une matrice 6×4 doit posséder quatre pivots pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes.
- d) Les colonnes d'une matrice 3×4 engendrent \mathbb{R}^3 .

Vrai-Faux

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant de \mathbb{R}^n et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de \mathbb{R}^m . □ □
- b) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement dépendant de \mathbb{R}^n et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement dépendant de \mathbb{R}^m . □ □
- c) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ engendrent \mathbb{R}^n et sont tels que $T(\vec{v}_j) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, alors $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. □ □
- d) Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T est une application linéaire. □ □
- e) Si $T(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire. □ □

Vrai-Faux

Exercice 8

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire et A la matrice canoniquement associée.

Prouver les affirmations suivantes

- a) T est surjective si et seulement si les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m ;
- b) T est injective si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Exercice 9

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Déterminer la condition nécessaire que doivent satisfaire m et n pour que

- a) T soit surjective,
- b) T soit injective,
- c) T soit bijective.

Exercice 10

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

- a) Montrer que si T est surjective, alors T est aussi injective.
- b) Montrer que si T est injective, alors T est aussi surjective.

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jérôme Scherer, José Luis Zuleta, . . .). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.